

**Corso di Misure Meccaniche Termiche e Collaudi**  
**5° anno - Ingegneria Meccanica**  
**Politecnico di Bari**

prof. Domenico Laforgia  
ing. Giuseppe Starace

## **TECNICHE DI ANALISI DEI FLUSSI**

In questa trattazione si farà riferimento ad alcune delle più importanti tecniche di visualizzazione del moto dei fluidi e ad alcune loro applicazioni. Alcuni dei metodi descritti rivestono una notevole importanza non solo per quanto riguarda un'analisi qualitativa dei fenomeni legati ai flussi dei fluidi, ma anche per quanto riguarda una loro analisi quantitativa.

### **1. Sistemi ottici per le osservazioni su flussi ad alta velocità**

Le tecniche ottiche utilizzate per la visualizzazione dei flussi si fondano sulla variazione dell'indice di rifrazione del mezzo fluido con la sua variazione di densità (assolutamente non trascurabile in presenza di flussi ad alta velocità).

Queste tecniche trovano nella non intrusività la ragione fondamentale del loro utilizzo. Con la loro adozione, infatti, si ovvia al problema di perturbare il flusso per consentirne l'analisi. Se solo si pensa alle difficoltà che si incontrano inserendo nei condotti investiti dal flusso sotto analisi le sonde anemometriche, si intuisce quale sia il vantaggio fondamentale legato all'adozione delle tecniche ottiche nell'analisi dei flussi. Non si induce alcuna rilevante perturbazione causata dallo strumento di misura, il cui elemento sensibile è un raggio di luce o un fascio di raggi luminosi che non altera in alcuna maniera il campo fluido. Inoltre, con l'adozione di opportuni accorgimenti, si possono implementare configurazioni che permettano di procedere a misure pressoché istantanee con tempi di risposta brevissimi degli strumenti di rilevazione, ovviando al problema legato alle inevitabili instazionarietà proprie di tutti i flussi.

#### **1.1. La legge di rifrazione**

Prima di discutere dei differenti metodi ottici è utile richiamare la legge della rifrazione o legge di Snell la quale si esprime in questi termini (Fig. 1):

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (1)$$

dove  $n_1$  ed  $n_2$  sono gli indici di rifrazione rispettivamente del mezzo ottico 1 e del mezzo ottico 2 mentre  $\alpha$  e  $\beta$  sono gli angoli che i raggi nei mezzi ottici 1 e 2 formano con la perpendicolare alla linea di separazione tra i due mezzi ottici.

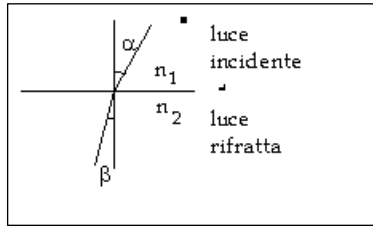


Figura 1. L'indice di rifrazione

Si ricordi che l'indice di rifrazione ( $n$ ) di un mezzo ottico rappresenta il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto ( $c^*$ ) e quella nel mezzo stesso ( $c$ ):

$$n = \frac{c^*}{c}$$

## 1.2. Principio alla base delle tecniche ottiche per la visualizzazione dei flussi ad alta velocità

I metodi ottici utilizzati per osservare i flussi ad alta velocità sono basati sul principio fondamentale della variazione dell'indice di rifrazione di un mezzo fluido trasparente<sup>1</sup> che si accompagna alla variazione puntuale della sua densità.

Ad esempio, se si illumina un gas che occupa un certo volume ed è soggetto al suo interno a variazioni della sua densità, la traiettoria dei raggi di luce incidenti su di esso sarà influenzata dalle variazioni della sua densità. Se l'effetto risultante dall'interazione della luce con il mezzo ottico viene adeguatamente sfruttato, è possibile correlare le variazioni della traiettoria dei raggi prodotti da una sorgente luminosa nota alle variazioni di densità del gas. Procedendo alla registrazione su di uno schermo o su di una piastra fotografica della figura luminoso in uscita dal mezzo ottico illuminato si potrà risalire al campo delle densità del fluido sotto esame.

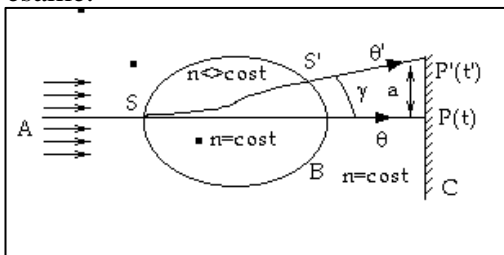


Figura 2. Generica traiettoria dei raggi incidenti.

Per comprendere meglio si consideri un fascio di raggi paralleli ( $A$ ) che attraversi un mezzo trasparente ( $B$ ) (che può essere rappresentato dalla sezione di prova di un tunnel del vento) e termini ad illuminare uno schermo ( $C$ ), Fig.2.

In assenza di una qualsiasi variazione di densità in  $B$  (aria a riposo, nessun gradiente di temperatura) un raggio di luce come quello contrassegnato con l' $I$

arriverebbe fino al punto  $P$  sullo schermo al tempo  $t$  con una inclinazione  $\theta$  sull'orizzontale.

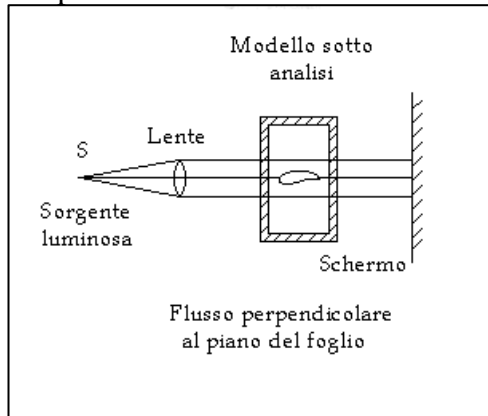
Se invece fossero presenti variazioni della densità in  $B$ , anche l'indice di rifrazione dell'aria della sezione di prova varierebbe; in particolare per l'aria è:

$$n = 1 + 3 \times 10^{-4} \frac{\rho}{\rho_1} \quad (3)$$

dove  $\rho$  è la densità puntuale dell'aria,  $\rho_1$  la densità di riferimento alla pressione di 1 atm e alla temperatura di 0°C e  $n$  l'indice di rifrazione.

<sup>1</sup> Quando si qualifica un mezzo ottico come "trasparente" bisogna tenere in debito conto la frequenza della luce incidente. Un qualsiasi mezzo ottico, sia esso solido, liquido o gassoso, può essere trasparente rispetto ad una frequenza, ma opaco rispetto ad un'altra. La qualifica "trasparente" non ha carattere complessivo, ma è legata alle frequenze della luce utilizzata per illuminare il particolare mezzo ottico.

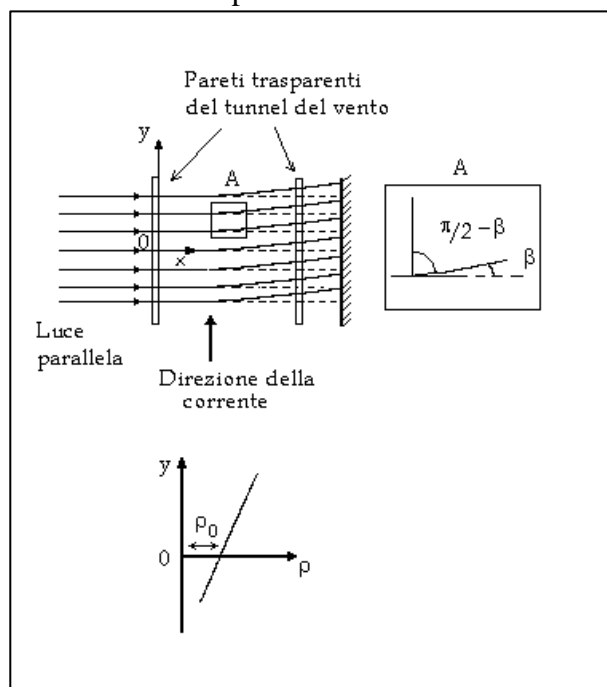
Il raggio di luce contrassegnato con  $l$  comincerebbe ad essere deviato in corrispondenza del punto  $S$  e seguirebbe la traiettoria indicata dalla linea continua in figura fino ad uscire dalla regione interessata dalle variazioni di densità al punto  $S'$  con un'inclinazione sull'orizzontale. Il raggio, poi, continuerebbe a percorrere una traiettoria rettilinea da  $S'$  fino a colpire lo schermo nel punto  $P'$  al tempo  $t'$ .



**Figura 3.** Sistema Shadowgraph diretto con luce parallela

L'effetto sul raggio che attraversa il mezzo gassoso soggetto a variazioni puntuali di densità è, in ragione delle variazioni puntuali dell'indice di rifrazione, è triplice quanto alle sue manifestazioni:

- 1) si verifica una variazione del punto in cui il raggio colpisce lo schermo. Il raggio si sposta da  $P$  a  $P'$  di una distanza  $a$ . La tecnica denominata *Shadowgraph* è basata sulla rilevazione ed interpretazione di questo spostamento.
- 2) Si verifica una variazione  $\gamma$  dell'angolo di incidenza del raggio sullo schermo pari alla differenza tra  $\theta'$  e  $\theta$ . La tecnica denominata *Schlieren* è basata sulla rilevazione ed interpretazione di questa variazione.
- 3) Si verifica una differenza di cammino ottico percorso dal raggio (e quindi di tempo di percorrenza del raggio) dalla sorgente allo schermo. Il ritardo accumulato è pari alla differenza tra  $t'$  e  $t$ :



**Figura 4.** La tecnica Shadowgraph

- a) La velocità con la quale il raggio di luce attraversa la regione  $B$  cambia per effetto dei gradienti di densità;
- b) Il cammino ottico che il raggio di luce deve percorrere cambia.

La differenza di cammino ottico è la base delle tecniche interferometriche.

### 1.3 La tecnica *Shadowgraph*

(sensibile alla  $\frac{d^2\rho}{dy^2}$ )

La tecnica *Shadowgraph* consiste nell'illuminare con luce parallela da una parte il campo fluido e rilevare dalla parte opposta su di uno schermo

(lastra fotografica) gli spostamenti dei raggi rispetto alla posizione che essi avrebbero se nella sezione di prova non vi fossero variazioni di densità (Fig. 3). Verrà mostrato che il metodo è sensibile alla derivata seconda della densità fatta rispetto alla direzione della sua variazione.

Si consideri (Fig. 4) un fascio parallelo di luce che illumina la sezione di prova di un tunnel del vento nel quale sia presente aria con un gradiente di densità costante secondo la direzione  $y$ . Si supponga il flusso monodimensionale e cioè sia che  $u, T, \rho, p \neq f(x)$ .

SI faccia l'ipotesi che la densità varia con la coordinata  $y$  secondo questa legge:

$$\rho = ay + \rho_0 \quad (4)$$

che è una legge che ha  $\frac{d^2\rho}{dy^2} = 0$ .

Si vedrà ora quale traiettoria seguirà il raggio contrassegnato con  $l$  attraverso la sezione di prova fino a raggiungere lo schermo.

Sia  $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$  l'angolo tra il raggio e l'asse  $y$  nel generico punto  $(x,y)$  e sia  $n$  l'indice di rifrazione locale.

Dall'equazione (1) si ricava che, se  $\beta_0 \approx 0$ :

$$n \cos \beta = n_0 \cos \beta_0 \approx n_0 \quad (5)$$

dove  $n_0$  e  $\beta_0$  sono rispettivamente l'indice di rifrazione dell'aria e l'angolo di inclinazione del raggio all'origine  $O$ .

Se nell'equazione (3) si pone  $k = \frac{3 \times 10^{-4}}{\rho_1}$ , sostituendo opportunamente nella (5) si ottiene:

$$\cos \beta = \frac{n_0}{n} = \frac{1 + k\rho_0}{1 + k\rho} \quad (6)$$

Poiché  $\beta \ll 1$  e  $k\rho \ll 1$ , l'equazione (6) può essere riscritta, moltiplicando e dividendo per  $(1 - k\rho)$ , con buona approssimazione come<sup>2</sup>:

$$1 - \frac{\beta^2}{2} \approx (1 + k\rho_0)(1 - k\rho) \approx 1 - k(\rho - \rho_0) \quad (7)$$

Da questa relazione si ottiene:

$$\beta = \sqrt{2k(\rho - \rho_0)} \quad (8)$$

La derivata rispetto ad  $y$  della densità è:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta \approx \beta \approx \sqrt{2k(\rho - \rho_0)} \quad (9)$$

---

<sup>2</sup> E' infatti:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \dots$$

Dalla equazione (4) si ottiene  $\rho - \rho_0 = ay$

Allora l'inclinazione  $\beta$  del raggio nella generica posizione è:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\beta \approx \beta \approx \sqrt{2aky} \quad (10)$$

Integrando si ha:

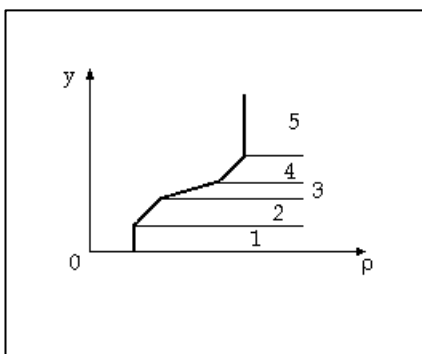
$$y = \frac{ak}{2} x^2 \quad (11)$$

che mostra che la traiettoria seguita dal raggio è una parabola essendo  $a$  e  $k$  costanti. La Fig. 4 mostra che tutti i raggi incidenti subiscono la stessa deviazione "parabolica" nell'attraversamento della regione a densità variabile linearmente secondo  $y$  e che tutti lasciano la sezione di prova parallelamente ad una stessa direzione comunque diversa da quella originaria.

Come risultato, sullo schermo si avrà una illuminazione comunque uniforme e ciò dimostra come questo metodo non è adatto alla visualizzazione di flussi con gradienti costanti di densità.

Si individui, allora, come mostrato in Fig. 5, la più complessa variazione di densità con la coordinata  $y$  e siano  $a_1 = \operatorname{cost}_1$ ,  $a_2 = \operatorname{cost}_2$  con  $a_2 > a_1$ :

Regione	$d\rho/dy$
1	0
2	$a_1$
3	$a_2$
4	$a_1$
5	0



**Figura 5.** Legge complessa di variazione della densità con la coordinata  $y$

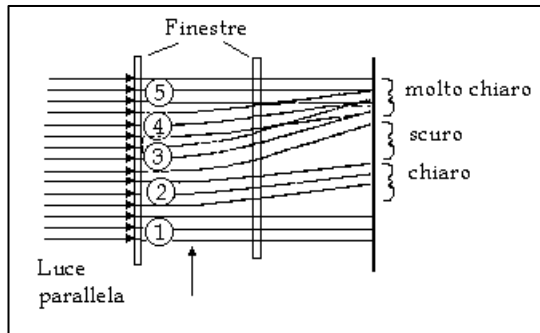
Per le regioni 2, 3 e 4 le traiettorie dei raggi saranno parabole. I raggi nella regione 3 avranno una variazione più accentuata di quelli che attraversano le regioni 2 e 4 per il fatto che il gradiente di densità è maggiore.

Questa volta, l'illuminazione dello schermo sarà tutt'altro che uniforme dato che il gradiente di densità lungo la coordinata  $y$  nella sezione di prova non è costante. La intensità di

luce incidente sullo schermo varierà dal basso verso l'alto alternando una zona mediamente illuminata, ad una scura, ad un'ultima molto illuminata. La tecnica di *Shadowgraph*, allora,

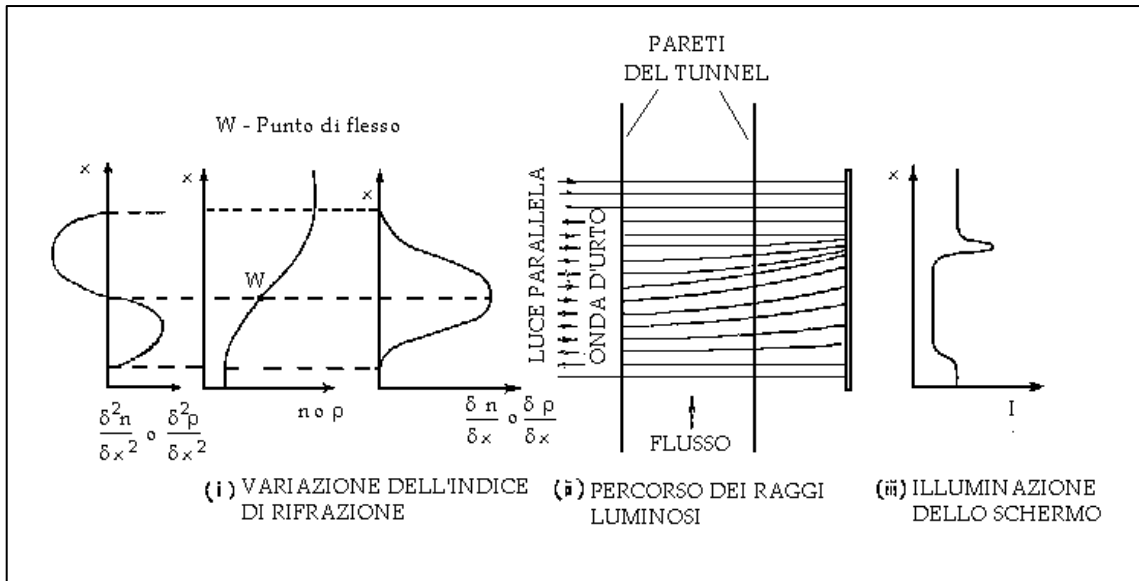
rivela variazioni positive della derivata seconda della densità secondo la direzione parallela allo schermo (dalla regione 3 fino alla regione 5) con corrispondenti aumenti di intensità luminosa. La distribuzione di densità rappresentata in Fig. 5 è, schematicamente, quella di un'onda d'urto. La Fig. 7 mostra le variazioni di densità e di indice di rifrazione in una scala appositamente allargata dovute alla presenza di una superficie d'urto.

Nella figura sono visibili anche le traiettorie dei raggi e la variazione di intensità luminosa rilevata sullo schermo. La direzione del flusso in questo caso può determinarsi ricorrendo alla analisi di una lastra fotografica ottenuta con tecnica *Shadowgraph*. La direzione del flusso è data dalla seguente variazione di intensità luminosa: luminosità mediamente intensa, zona oscura e luminosità elevata. Questa tecnica risulta utile nella indagine sulle onde d'urto e sugli strati limite che presentano profili di densità come quelli rappresentati in Fig. 8. Nella pratica la distanza dello schermo dalla sezione di prova sarà scelta in maniera che siano evidenti le variazioni di intensità luminosa.

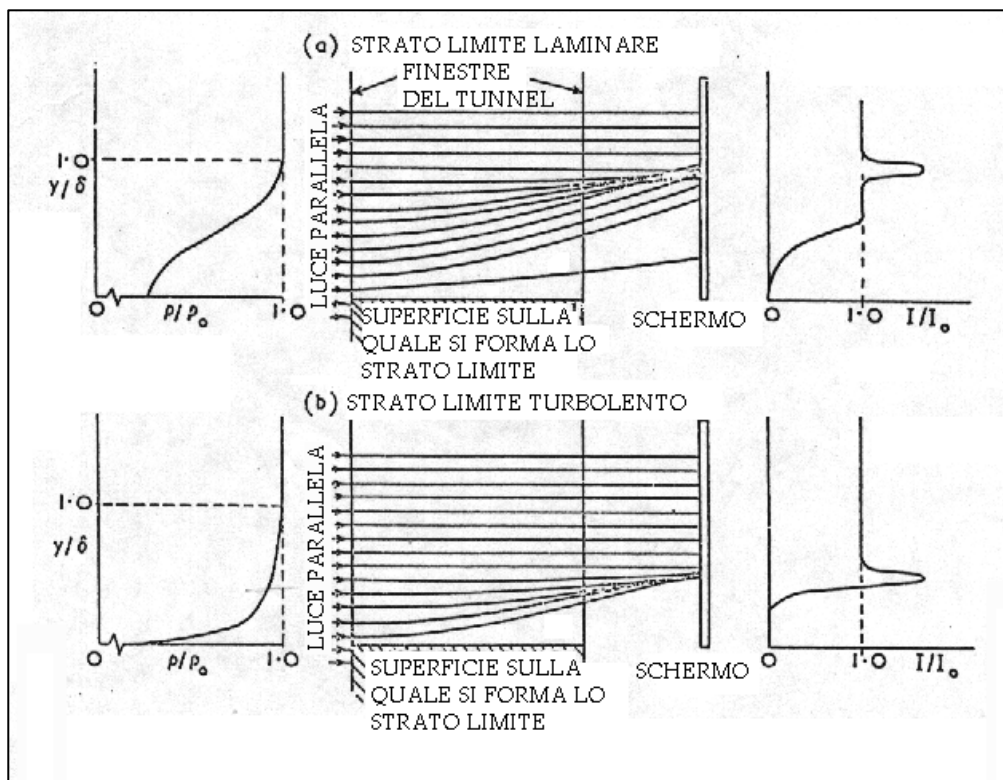


**Figura 6.** Analisi dell'illuminazione dello schermo

Con la tecnica *Shadowgraph*, quindi, si possono descrivere le variazioni di densità in un tunnel (ad esempio dovute alla presenza di zone di ristagno del flusso). E' evidente che quanto maggiori saranno i gradienti di densità all'interno della sezione di prova, tanto minore sarà la distanza dello schermo dalla stessa sezione perché sia possibile distinguere con precisione le regioni a differenti intensità luminosa.



**Figura 8.** Figura di intensità ottenuta con tecnica Shadowgraph diretta: urto bidimensionale.



**Figura 7.** Figure di intensità ottenute con tecnica Shadowgraph diretta: strati limite bidimensionali (flusso perpendicolare al piano del foglio).

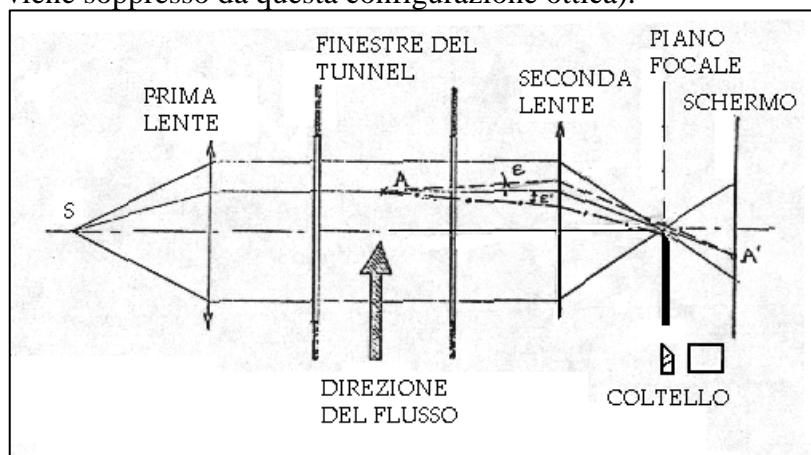
### 1.4 La tecnica *Schlieren*

La tecnica di *Schlieren* sfrutta la deflessione dei raggi luminosi rispetto alla loro direzione di partenza dovuta a gradienti di densità (o, che è lo stesso, a gradienti di indice di rifrazione) perpendicolari alla direzione stessa.

Per descrivere come la tecnica funzioni si osservino le Fig. 9 e 10.

In Fig. 9  $S$  è una sorgente di luce puntiforme posizionata nel fuoco di una prima lente che alla sua destra produce un fascio di luce parallela che attraversa la sezione di prova. Una seconda lente raccoglie i raggi uscenti dalla sezione di prova sul suo piano focale mostrando l'immagine di  $S$ . In assenza di qualsiasi gradiente di indice di rifrazione il raggio che colpisce il punto  $A$  non subisce deviazioni di traiettoria e colpisce lo schermo in corrispondenza del punto  $A'$ .

Se nel punto  $A$  si registra una variazione di densità  $\epsilon$ , e quindi, di indice di rifrazione, il raggio sarà deviato di un angolo  $\epsilon$  nella direzione del gradiente positivo della densità, in questo caso nella direzione della corrente d'aria (linea tratteggiata in figura). Questo raggio deflesso colpisce lo schermo nello stesso punto  $A'$  (se lo schermo è posto ad una opportuna distanza da  $A$ , lo scostamento lineare viene soppresso da questa configurazione ottica).



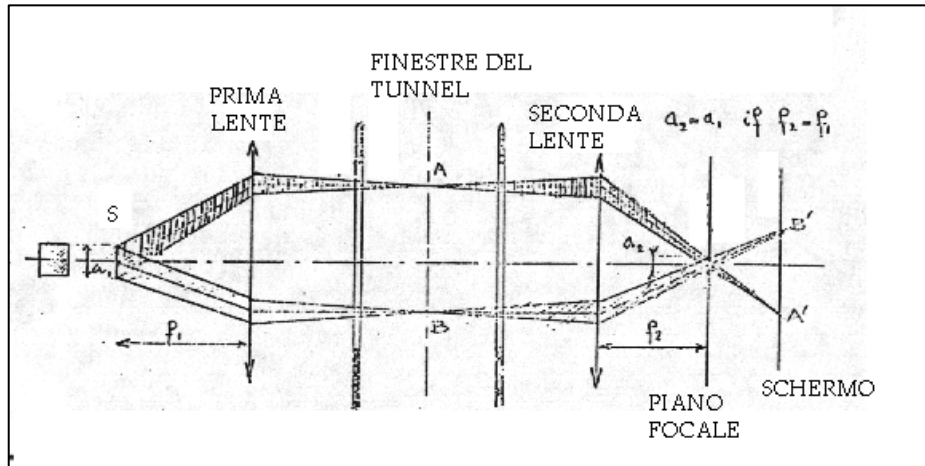
**Figura 9.** Effetto del coltello in caso di sorgente puntiforme.

Fino a questo momento sullo schermo si evidenzia un'illuminazione uniforme dovuta anche in presenza di un gradiente di densità nella sezione di prova. Se, invece, come rappresentato in Fig. 9, si utilizza un coltello piano e lo si posiziona con la lama esattamente nel fuoco a destra della seconda lente, lo schermo, nel caso si proceda alla illuminazione con la sorgente puntiforme  $S$  sarà completamente oscuro tranne che nel punto  $A'$ . Infatti il raggio che colpisce il punto  $A$  nella sua traiettoria deviata supera il coltello e raggiunge lo schermo, a differenza di tutti gli altri raggi indisturbati che lo trovano sul loro cammino.

Si supponga, ora, che il gradiente di densità nel punto  $A$  sia negativo. La nuova traiettoria del raggio sarà quella rappresentata dalla linea a tratto e punto in Fig. 9. Il raggio in questo caso, come tutti gli altri raggi indisturbati, troverà l'ostacolo del coltello prima di giungere allo schermo. Questo, allora, sarà completamente scuro.

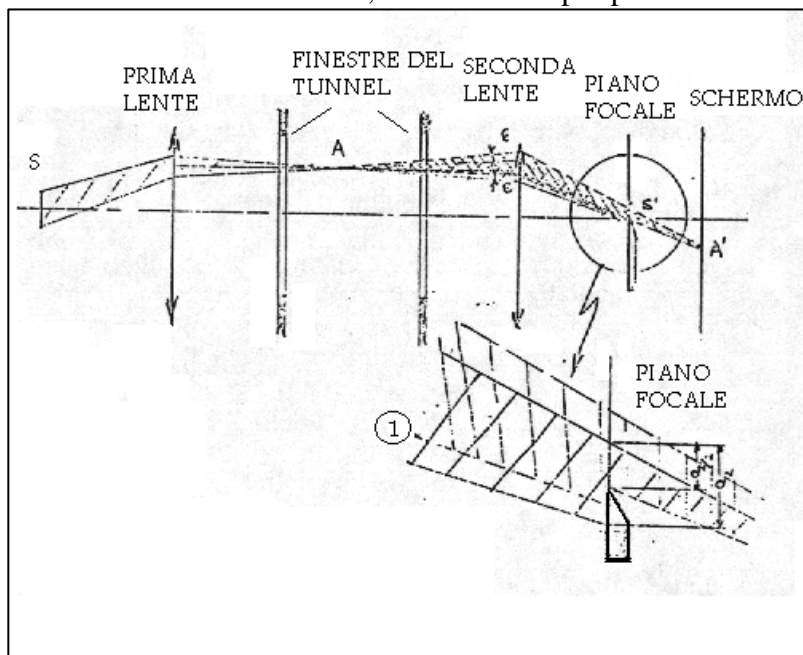
In Fig. 10 si propone una configurazione che ovvia al problema appena evidenziato. La sorgente di luce utilizzata non è più puntiforme, ma di estensione finita, per esempio a sezione quadrata. Ogni punto della nuova sorgente può essere pensato come una sorgente puntiforme i cui raggi sono leggermente inclinati rispetto alla direzione del punto di mezzo della sorgente  $S$ . In questo modo un punto qualsiasi della sezione  $AB$  riceveranno luce da tutti punti della sorgente. Tutti i raggi che colpiranno  $A$  illumineranno  $A'$  sullo schermo. Si può mostrare che ogni punto dello schermo riceve la stessa quantità di luce che ricevono  $A'$  e  $B'$  in Fig. 10 così che lo schermo è uniformemente illuminato.





**Figura 11.** Effetto del coltello in caso di sorgente di dimensioni finite.

In Fig. 11 si introduce nella nuova configurazione il coltello opaco con la lama in corrispondenza del piano focale a destra della seconda lente. Questo taglia parte della luce incidente sullo schermo provocando una diminuzione di intensità luminosa sullo schermo ed una variazione della figura luminosa su di esso. Con il coltello nel piano focale si sottrae la stessa intensità luminosa a tutti i punti dello schermo se non c'è variazione di densità nella sezione di prova. Se invece il gradiente di densità è presente nella sezione di prova la rifrazione attraverso A provocherà una deflessione (supposta pari ad  $\varepsilon$  per tutti i raggi della sorgente  $S$  di estensione finita) del raggio corrispondente e, quindi, un aumento dell'intensità luminosa in corrispondenza di  $A'$ . Se si ruota il coltello di  $180^\circ$  intorno all'asse focale della lente di destra il punto  $A'$  risulterà meno illuminato. Se il raggio indicato con  $l'$  in Fig. 11 a seguito della deflessione raggiunge la lama del coltello il sistema si satura, cioè non sarà più possibile verificare ulteriori



**Figura 10.** La sorgente di dimensioni finite ed il coltello.

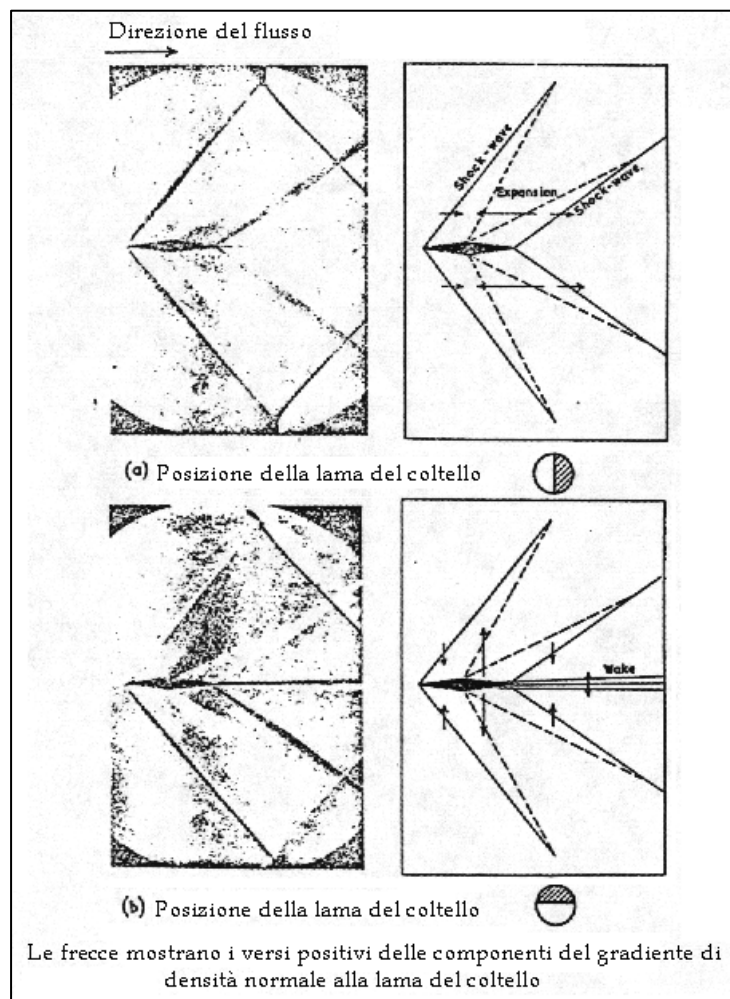
variazioni di densità nel punto A. La saturazione del sistema dipende, come è facile notare in Fig. 11, dalla dimensione  $a_2$  della sorgente luminosa.

Si può concludere, allora, evidenziando che nella tecnica di *Schlieren* è importante la sola variazione di inclinazione dei raggi luminosi dovuta alla variazione dell'indice di rifrazione del mezzo nella sezione di prova.

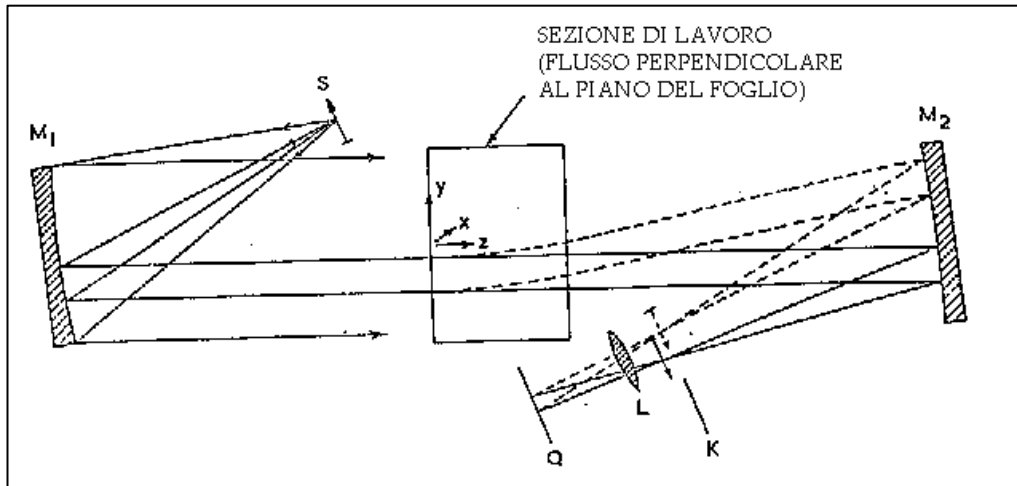
Si può inoltre evidenziare che la tecnica è sensibile solo a gradienti normali alla lama del coltello. L'influenza della posizione del coltello viene evidenziata in Fig. 12. Durante la sperimentazione su di un campo fluido sarà interessante, allora, ruotare il coltello nel piano perpendicolare all'asse ottico delle lenti per conoscere più a fondo le variazioni della densità del gas in tutte le direzioni di interesse.

### Considerazioni pratiche

Quando la sezione di prova è grande il fascio di luce parallelo deve essere anch'esso necessariamente di grande estensione. In questi casi l'utilizzo di specchi sferici è preferibile rispetto a quello delle lenti poiché queste sono certamente più costose. In Fig. 13 è rappresentato il classico *setup* della tecnica di *Schlieren* che utilizza gli specchi sferici.



**Figura 12.** Fotografie Schlieren



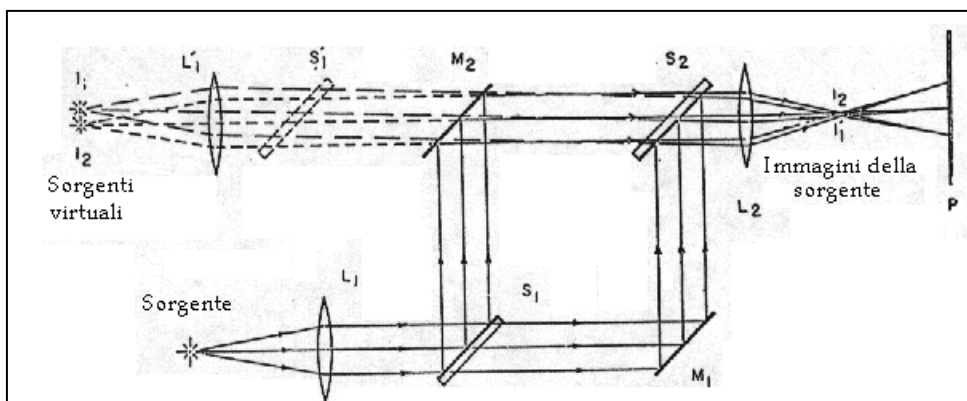
**Figura 13.** Setup di un tipico apparato Schlieren (raggi indisturbati con linea piena, raggi disturbati con linea tratteggiata).

### 1.5 Interferometria di Mach-Zehnder

In Fig. 14 è rappresentata la classica configurazione dell'interferometro di Mach-Zehnder.

La luce proveniente da una sorgente monocromatica (una sola lunghezza d'onda,  $\lambda$ ) attraverso una lente  $L_1$  viene collimata per formare un fascio di luce parallela. Questo fascio colpisce lo specchio semirifrangente  $S_1$  (*beam splitter*) e, perciò, parte del fascio originario viene riflesso e parte trasmesso indisturbato verso lo specchio  $M_1$ . Qui esso viene riflesso completamente verso un altro specchio semirifrangente  $S_2$  per essere direzionato in parte verso la lente  $L_2$  (la parte trasmessa attraverso  $S_2$  viene persa). Dopo aver attraversato  $L_2$  il fascio colpisce la lastra fotografica  $P$ . La luce riflessa da  $S_1$ , invece, raggiunge lo specchio  $M_2$  che la riflette verso  $S_2$ . Qui parte del fascio viene riflesso e si perde, parte attraversa  $S_2$ , la lente  $L_2$  e colpisce la lastra fotografica  $P$ .

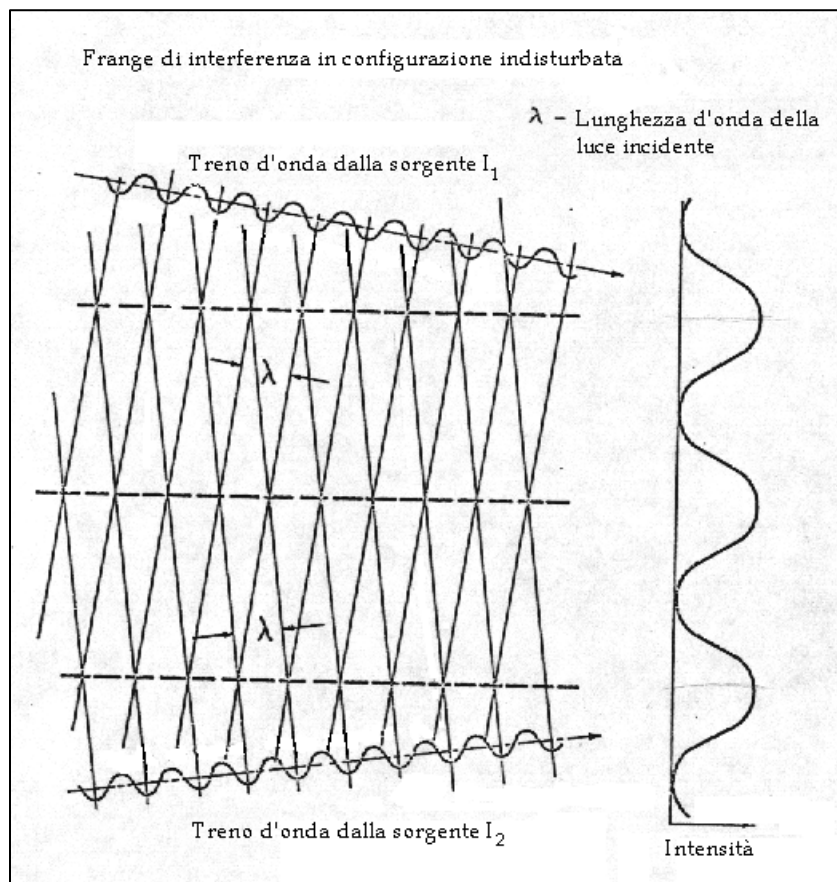
Questo *setup* soddisfa le condizioni necessarie per l'interferenza delle onde luminose: la coincidenza della frequenza (o lunghezza d'onda,  $\lambda$ ) dei due fasci e la costanza dello sfasamento tra loro (la sorgente è effettivamente la stessa).



**Figura 14.** Schema fondamentale dell'interferometria di Mach-Zehnder.

Facendo attraversare ad uno dei due fasci il flusso sotto analisi questo subirà un “disturbo” rilevabile sulla lastra fotografica  $P$ .

I due fasci che colpiscono  $P$  sembrano provenire da due sorgenti differenti ( $I_1$  e  $I_2$ , Fig. 14) situate a sinistra dello specchio  $M_2$ . Attraverso una corretta disposizione e orientazione degli specchi è possibile far intersecare i fasci in un punto dello spazio come mostrato in figura. Poiché entrambi sono alla stessa lunghezza d'onda  $\lambda$ , i loro fronti d'onda possono essere entrambi rappresentati da piani distanziati tra loro di  $\lambda$  inclinati perpendicolari alla loro direzione di propagazione (Fig. 15). Le linee tratteggiate orizzontali uniscono i punti in cui si ha la somma delle intensità luminose dei due fasci. La lastra fotografica  $P$  sarà allora illuminata alternando linee orizzontali luminose a linee buie (figura di



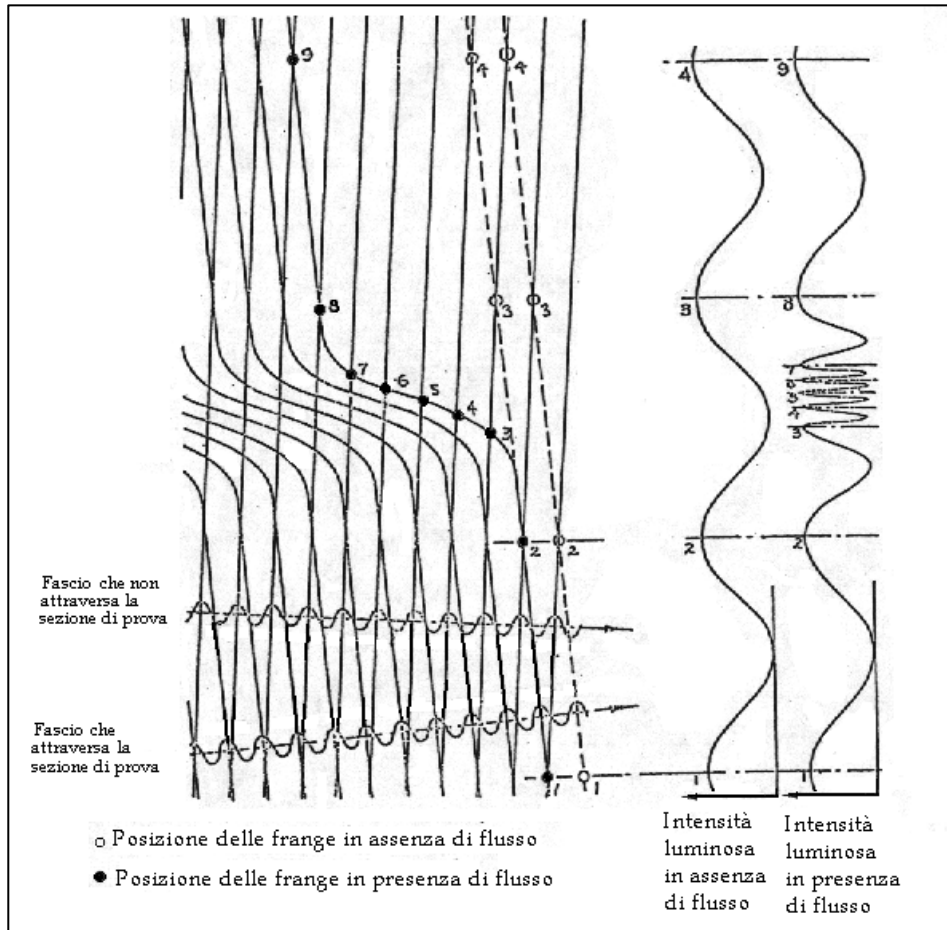
**Figura 15.** Franghe di interferenza e figura di intensità in configurazione indisturbata.

interferenza).

Se si produce una differenza di densità all'interno della sezione di prova, i fronti d'onda del fascio che la attraversa subiranno una variazione di cammino ottico rispetto al fascio indisturbato e per questo si provocherà una variazione della figura di interferenza (uno spostamento di tutta la figura in alto o in basso o una variazione del numero e della spaziatura delle frange di interferenza a seconda della configurazione dei gradienti di densità nella sezione di prova) sulla lastra fotografica (Fig. 16).

E' vero, allora, che la interferometria di Mach-Zehnder sfrutta la differenza di cammino ottico di due fasci di luce di cui uno di riferimento e l'altro di misura.

Allo stesso risultato si può arrivare riferendosi ai tempi di attraversamento della sezione di prova da parte della luce per effetto dei gradienti di densità  $\rho$ , che è lo stesso, di indice di rifrazione.



**Figura 16.** Variazione della figura di intensità luminosa.